Муниципальное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования Дом детского творчества муниципального образования Кавказский район

Сборник дидактических материалов

«Финансовые задачи. Подготовка к ЕГЭ»

Подготовила: Боталова Ольга Викторовна,
педагог дополнительного образования
МБОУ ДО ДДТ

ст. Кавказская 2021

Оглавление:

Ведение.

В нашем современном обществе огромную роль играет экономика. Она требует от человека глубоких знаний и умений при работе с массивными числовыми потоками информации. Проценты, вклады, кредиты стали неотъемлемой частью нашей жизни. Подтверждением этому служит то, к примеру, что понятие «процент» широко используется как в реальной жизни, так и в различных областях науки. Без процентов невозможно обойтись ни в финансовом анализе, ни в жизни. Для того, чтобы развить навыки экономической грамотности, её основы закладываются в школе. Но, особое внимание экономическим задачам уделяется на Едином Государственном Экзамене, где данные задачи представлены в задании №15(ЕГЭ 2022). Одними из особенностей данных задач является их нестандартность и повышенная сложность решения. Умение эффективно решать задачи на сложные и простые проценты, понимание различия дифференцированных и аннуитетных платежей, а также владение основными теоретическими знаниями в экономике, способствуют правильному решению задач в области экономики на ЕГЭ. Решение многих задач школьного курса, нестандартных задач, практических задач помогает разобраться в новых экономических веяниях жизни. В отличие от других экзаменационных заданий, «экономические» задачи не отличаются большим разнообразием и встречаются лишь нескольких типов. В данной методической материале собраны основные типы экономических задач.

Изучив материалы сборника вариантов ЕГЭ под редакцией Ященко, материалы на сайте ФИПИ условно можно разделить все задачи на следующие типы:

1. Погашение кредита **равными долями (платежами)** в течение всего срока погашения – **аннуитетный платеж.**
2. Погашение кредита **неравными долями (платежами, траншами);**
3. **Равномерное изменение величины долга** (дифференцированный платеж).

Что нужно повторить для успешной работы с финансовыми задачами?

Арифметическая прогрессия - это ряд чисел, в котором все член получаются из предыдущего методом добавления к нему 1-го и того же числа d, которое называется **разностью арифметической прогрессии**. Или другими словами: **арифметическая прогрессия** — численная последовательность, которая имеет вид:

$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ \ldots,\ a_1+(n-1)d,\ \ldots$, т.е. последовательность чисел (**членов** прогрессии), в которой числа, начиная со 2-го, получаются из предыдущего путем добавления к
нему постоянного числа d (**шаг** либо **разность** прогрессии):

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Всякий (n-й) член прогрессии можно вычислить с помощью формулы общего члена:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Арифметическая прогрессия - это монотонная последовательность. При $d > 0$ она возрастает, а при $d < 0$ — убывает. Если $d = 0$, то последовательность - стационарная. Это следуют из соотношения $a_{n+1} - a_n = d$ для членов арифметической прогрессии. Член арифметической прогрессии с номером n можно найти с помощью формулы

$a_n = a_1 + (n-1)d$, где a_1 — 1-й член прогрессии, d — разность прогрессии.

Сумму 1-х n членов арифметической прогрессии $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ можно найти с помощью формул:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

где a_1 — 1-й член прогрессии,

a_n — член с номером n,

n — число суммируемых членов.

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,$$

где a_1 — 1-й член прогрессии,

d — разность прогрессии,

n — число суммируемых членов.

Геометрическая прогрессия это последовательность чисел $b_1, b_2, b_3, \ldots$ (членов прогрессии), в которой каждое число, начиная со 2-го, получают из предыдущего путем умножения его на определённое число q (знаменатель прогрессии), где $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$: b_1, $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_2 q$, $\ldots$, $b_n = b_{n-1} q$. Или другими словами: **геометрическая прогрессия** - это численная последовательность, каждое из чисел равняется предыдущему, умноженному на определенное

постоянное число q для данной прогрессии, которое называется **знаменателем геометрической прогрессии**.

Каждый член геометрической прогрессии можно вычислить при помощи формулы:

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Когда $b_1 > 0$ и $q > 1$, значит, прогрессия возрастает , когда $0 < q < 1$, значит, прогрессия убывает, а при $q < 0$ — знакочередуется.

Формула n-го члена:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формулы суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}, \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

С чего начать подготовку к решению экономической задачи?

Решение любой текстовой задачи складывается из нескольких основных моментов:

• чтение условия задачи; читайте его до тех пор, покуда сможете, не подглядывая в текст, объяснять суть описанного в задаче процесса (без конкретных числовых данных, конечно, – зазубривать ничего не нужно);

• выбор переменных; для каждого типа задач существуют рекомендации, какие величины лучше всего обозначать как переменные (и это не всегда те величины, о которых идет речь в вопросе задачи); переменных при решении текстовой задачи нужно вводить столько, сколько их нужно для того, чтобы просто и логично составить уравнения и неравенства (не бойтесь, если переменных оказалось слишком много – например, больше, чем число уравнений: если вы все делаете правильно, то «лишние» переменные взаимно уничтожатся или сократятся; еще один вариант – в процессе решения надо будет найти не сами переменные по отдельности, а какую-либо их комбинацию);

• составление уравнений и неравенств, формализация того, что необходимо найти в процессе решения задачи; при составлении уравнений обращайте

внимание на единицы измерения – они должны быть одинаковыми для всех одноименных величин;

• решение полученного уравнения, неравенства или системы;

• исследование полученного результата и нахождение ответа на вопрос задачи

Аннуитетный платеж — способ выплаты по кредиту, при котором сумма выплат делится на равные части (столько, сколько планируется платежей), а сумма одной выплаты состоит из остатка по кредиту и процентов, начисленных на остаток долга. При таком способе погашения основной долг, являющийся телом кредита, при первых платежах практически не погашается, а выплачиваются только проценты. Структура аннуитетного платежа такова, что изначально банк вынуждает вас оплатить проценты за весь период, а лишь потом приступить к активному погашению задолженности по основному долгу. По сути, при аннуитетных платежах получается, что банк забирает свой заработок в виде уплаченных процентов заблаговременно, ранее чем истекает полный срок пользования этими деньгами.

Рассмотрим схему погашения кредита. Пусть S – кредит, x- ежегодный (ежемесячный) платёж, r- процент, тогда получим:

S – кредит(долг банку);

$S+\frac{r}{100}S$ (долг банку после начисления процентов);

$(S+\frac{r}{100}S)-x$(долг банку после первой выплаты);

……..

долг после последней выплаты приравнивается к нулю. Решаем полученное уравнение.

Рассмотрим пример решения типовой задачи.

Задача. В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга, равную 399 300 рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (т.е. за три года)?

Решение: Пусть S- сумма кредита.

период	**долг**	**пояснения**
июль	S	долг банку
январь(1 –й год)	S+0,1 S=1,1 S	долг банку(после начисления процентов
февраль-июнь (1 –й год)	1,1 S- 399300	долг банку(после выплаты)
январь(2-й год)	1,1 S- 399300+0,1(1,1 S-399300)= 1,1 S-399300+0,11 S-39930=1,21 S-439230	долг банку(после начисления процентов)
февраль-июнь (2 –й год)	1,21 S-439230-399300=1,21 S-838530	долг банку(после выплаты)
январь(3-й год)	1,21 S-838530+0,1(1,21 S-838530)= 1,21 S-838530+0,121 S-83853=1,331 S-922383	долг банку(после начисления процентов)
февраль-июнь (3–й год)	1,331 S-922383-399300= 1,331 S-1321683	долг банку (после выплаты)

1,331 S-1321683=0

1,331 S=1321683

S=1321683:1,331

S=993000 рублей.

Ответ: 993000 рублей.

Задачи для самостоятельной работы:

<u>Задача 1</u>

31 декабря 2017 года Сергей взял в банке 2648000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплат кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк **x** рублей. Какой должна быть сумма **x**, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

<u>Задача 2</u>

В сентябре Федор взял кредит в 1,5 млн. руб. По условиям договора:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по август каждого года Федор выплачивает часть долга.

На какое минимальное количество лет может взять кредит Федор, чтобы не выплачивать более 450 тыс. руб. в год?

Задача 3

31 декабря 2017 года Пал Палыч взял в банке некоторую сумму денег в кредит под 10% годовых. По условиям договора: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Пал Палыч переводит в банк 2928200 рублей. Сколько взял Пал Палыч в банке, если смог выплатить долг четырьмя равными платежами?

Задача4

Федора не смутила история с первым кредитом, и он берет в банке 2 млн. руб. под 5% годовых. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. На какое минимальное количество лет должен взять кредит Федор, чтобы не выплачивать более 350 тыс.руб. ежегодно?

Задача 5.

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга, равную 207 360 рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (т.е. за четыре года)?

Задача 6.

31 декабря 2020 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 20 %), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг

Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, сели бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

Задача 7.

31 декабря 2020 года Савелий взял в банке 7 378 000 рублей в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 12,5 %), затем Савелий переводит в банк платёж. Весь долг Савелий выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, сели бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

Задача 8.

В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

— в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;

— с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму взяли кредит банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат на 156 060 рублей больше суммы взятого кредита.

Задача 9

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 31% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 69 690 821 рубль.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Задача 10

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 147 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен двумя равными платежами, то есть за два года.

Неравными долями (платежами, траншами)

Рассмотрим пример решения типовой задачи.

Задача

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 100 тыс.рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Известно, что кредит был полностью погашен за два года, причём в первый год было переведено 75 000 рублей, а во второй год – 46 000 рублей. Найдите число r.

Решение:

период	**долг**	**пояснения**
июль	100	долг банку
январь(1 –й год)	$100 + 100\frac{r}{100}=$ $100\,000+r$	долг банку (после начисления процентов
февраль-июнь (1 –й год)	$100 +r-75 =25+r$	долг банку(после выплаты)
январь(2-й год)	$25+r+\frac{r}{100}(25+r)=$ $25+r+\frac{1}{4}r+\frac{1}{100}r^2=$ $25+\frac{5}{4}r+\frac{1}{100}r^2$	долг банку(после начисления процентов)
февраль-июнь (2 –й год)	$25+\frac{5}{4}r+\frac{1}{100}r^2-46=\frac{5}{4}r+\frac{1}{100}r^2-21$	долг банку(после выплаты)

$\frac{1}{100}r^2+\frac{5}{4}r-21=0$

$r^2+125r-2100=0$

$D=15625+8400=24025$

$r=15\%$

Задачи для самостоятельной работы:

Задача 1

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 100 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Известно, что кредит был полностью погашен за два года, причём в первый год было переведено 68 000 рублей, а во второй год – 59 000 рублей. Найдите число r.

Задача 2

31 декабря 2014 года Валерий взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Валерий переводит очередной транш. Валерий выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 660 тыс. рублей, во второй — 484 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Валерию?

Задача 3.

Георгий взял кредит в банке на сумму 804 000 рублей. Схема выплата кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 процентов оставшуюся сумму долга, а затем Георгий переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Георгий погасил кредит за три года, причем каждый его следующий платеж был ровно вдвое меньше предыдущего. Какую сумму Георгий заплатил в третий раз? Ответ дайте в рублях.

Равномерное изменение величины долга (дифференцированный платеж).

Дифференцированный платеж — способ выплаты по кредиту, при котором сумма долга клиента делится на равные части (столько, сколько планируется платежей для его выплаты), к каждой из которых прибавляются проценты, начисленные на оставшуюся сумму долга. При этом с каждым разом сумма выплаты уменьшается, а в последний раз клиент платит наименьшую сумму.

Дифференцированные платежи более выгодны клиенту, так как переплата в этом случае для намного меньше, чем в случае выбора клиентом аннуитетной схемы. Но при этом стоит учитывать то, что первые платежи могут оказаться слишком большими для клиента. Кроме того, сумму каждого следующего дифференцированного платежа необходимо отслеживать. Все это делает аннуитетную схему выплат более удобной как для клиента, так и более выгодной для банков, а потому и наиболее популярной.

Рассмотрим пример решения типовой задачи.

Задача .

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение.

Пусть S – сумма кредита. По условию сумма кредита уменьшалась равными долями, т.е. ежемесячно выплата состояла из части долга($\frac{S}{19}$) и процентов на остаток долга.

период	Часть долг	проценты
1	$\frac{S}{19}$	$S\times\frac{19}{19}\times\frac{r}{100}$
2	$\frac{S}{19}$	$S\times\frac{18}{19}\times\frac{r}{100}$
3	$\frac{S}{19}$	$S\times\frac{17}{19}\times\frac{r}{100}$
4	$\frac{S}{19}$	$S\times\frac{16}{19}\times\frac{r}{100}$

5	....	.....
18	$\frac{S}{19}$	$S\times\frac{2}{19}\times\frac{r}{100}$
19	$\frac{S}{19}$	$S\times\frac{1}{19}\times\frac{r}{100}$

Так как сумма выплат за весь период оказалась на 30% больше взятого кредита составим и решим уравнение:

$19\times\frac{S}{19}+S\times\frac{1}{19}\times\frac{r}{100}(\frac{19+1}{2}\times19)=1,3S;$

$S+S\times\frac{r}{10}=1,3S;$

$0,3S=S\times\frac{r}{10}$

$r=3\%$

Задачи для самостоятельной работы:

Задача 1

В январе планируется взять кредит на 5 месяцев. Условия по договору следующие:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2–го по 14-е число нужно выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Сколько процентов от суммы кредита составит общая сумма выплат за весь срок?

Задача 2

Взят кредит на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2–го по 14-е число нужно выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Какую сумму планируется взять в

кредит, если известно, что за первые 9 месяцев нужно выплатить 2048 тыс. руб.?

Задача 3

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн. рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы: 1) каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года; 2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга; 3) в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года. На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 17,5 млн. рублей?

Задача 4

Жанна взяла в банке в кредит 1,2 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2 %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна вернёт банку в течение первого года кредитования?

Задача 5

15-го января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условие его выплаты таковы:

- 1-го числа каждого месяца долго возрастёт на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит?

Задача 6

2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн. руб. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года.

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга.

— в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 4,2 млн. руб.

— суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r, если в 2021 году долг будет выплачен полностью и общие выплаты составят 6,1 млн. рублей.

Задача 7

15-го января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

Задача 8

15-го января планируется взять кредит в банке на сумму 2,4 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно выплатить банку в первые 12 месяцев?

Задача 9

15-го января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условие его выплаты таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит?

Задача 10

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 3,6 млн рублей?

Заключение.

Опыт показывает, что учащиеся с большим интересом решают такие задачи, с удовольствием составляют их самостоятельно. Материал для занятий можно найти и в открытом банке заданий ЕГЭ, а также в системе СтатГрад.

Таким образом, считаю, что предлагаемая методика обучения решению задач является эффективным способом обучения решению задач с социально-экономическим содержанием при подготовке выпускников к ЕГЭ по математике профильного уровня.

Литература:

2. Под ред. Ященко И.В. «ЕГЭ . Математика.. Профильный уровень. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ». Разных лет
3. Материалы образовательного портала ege.sdamgia.ru
4. Материалы образовательного портала infourok.ru
5. Прокофьев А.А. «Рекомендации по подготовке к выполнению задания №17 (финансово-экономические задачи) ЕГЭ профильного уровня».